MATHÉMATIQUES

Le candidat dispose d'environ trente minutes pour préparer les deux exercices qui suivent.
A l'issue de cette préparation, il sera convié à exposer ses résultats au tableau.
L'ordre d'exposition des exercices est laissé à son libre choix.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x + \cdots + x^n}.$$

Montrer que I_n converge vers $1/2$.

Exercice 2. On étudie un modèle de population de bactéries au cours du temps ayant les propriétés suivantes. La suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ désigne une suite de temps.

- (i) Au temps t_0 la population est composée d'un individu.
- (ii) Dans l'intervalle de temps $]t_n, t_{n+1}[$ chaque individu a une probabilité de $1/2$ de se diviser en 2.
- (iii) Les divisions sont indépendantes les unes des autres.
- (iv) Entre les temps t_n et t_{n+1}, un individu se divise au plus une fois.
- (v) Aucun individu ne meurt.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note X_n la population de bactéries au temps t_n.

1. La fonction random.random() renvoie aléatoirement une valeur x entre 0 et 1 de telle sorte que pour tout $(a, b) \in]0, 1[^2$, si $a < b$ alors $P(a < x < b) = b - a$. Justifier que l'appel de la fonction X1 simule une réalisation de X_1.
2. Donner la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi marginale de X_2.
3. Corriger la fonction Python X, afin que prenant un entier naturel n en argument, celle-ci simule une réalisation de X_n.
4. Donner l'univers image de X_n.
5. Calculer $P(X_n = 1)$.
6. Déterminer $P_{X_n=2^n}(X_{n+1} = 2^{n+1})$ et en déduire $P(X_n = 2^n)$.
7. Soit $k \in [\![1, 2^n]\!]$. Quelle est la loi conditionnelle de $X_{n+1} - k$ sachant $X_n = k$? En déduire, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n = k$.
8. Soit $k \in [\![1, 2^{n+1}]\!]$. Démontrer que

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{2^n} P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)P(X_n = i).$$

9. Écrire en Python une fonction prenant un entier naturel n en argument puis renvoyant la loi de X_n sous la forme d'une liste L telle que $L[i]$ soit égale à $P(X_n = i+1)$.

Document à rendre à la fin de l'interrogation

Code Python fourni :

```
import random

def X1() :
    """Simule une réalisation de $X_1$."""
    if random.random() < 1/2 :
        return 1
    return 2

def X(n) :
    """Simule une réalisation de $X_n$."""
    m = X(n-1)
    S = 0
    for k in range(m)
        S += X1()
    return S
```

Document à rendre à la fin de l'interrogation